人口統計(Demography)

授課教師：余清祥教授

日期：2023年4月12日

第五講：定常人口理論

課程下載：

http://csyue.nccu.edu.tw

- 預測一個地區或國家的人口數及其結構， 是人口分析的一個重要課題，本課程的後半部均以此為目標。關於人口推估，有以下幾個假設：

→Stationary（定常；均衡）：每年的出生與死亡狀況（即生育率、死亡率）不變。

→Stable（穩定）：出生穩定變化、死亡率不變。

→Quasi-stable（半穩定）：出生與死亡狀況均穩定變化。

- 定常人口的三個基本假設：

→各年齡死亡率是時間的定值，死亡率可隨年齡改變。

→每年（或每月）的出生數固定，也就是嬰兒數每年維持穩定。

→各年齡的淨遷移數為零，亦即維持封閉人口(Closed to Migration)。

- 如果某地區的人口滿足上述假設，即可代入生命表，以生命表的方式詮釋該地區的人口特性。

- 本單元在均衡的假設下考慮人口及其結構的變化，即只考慮出生死亡，不計算移民。(i.e., $I(t) = E(t) = 0$.)

- 先考慮同一世代的人，類似生命表的假設，但我們令「在同一瞬間出生 l_0人」的條件放寬成「在同一年內均勻（或穩定）出生的 l_0 人」，在研究這群人隨著年紀增加而產生的人數變化。
→之後，我們若假設每年都有均勻出生的 l_0 人，即成為定常人口理論的假設。

定常人口理論

- 假設每年出生 l_0 人，移入、移出人數為 0 (也就是封閉母體)，僅可能因出生與死亡而改變人口數。

- 生存數 l_x 的詮釋：

→ 每年滿 x 歲的人數。

→ 每年年齡 x 以上的死亡人數，亦即

$$l_x = d_x + l_{x+1} = d_x + d_{x+1} + \cdots = \sum_{y=x}^{\infty} d_y$$

- 定常人口 L_x 的詮釋：

→ l_x位 x 歲的人在滿 $x+1$ 歲前的存活年數。

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt = 1 \cdot l_{x+1} + a_x \cdot d_x.$$

→ 每年年中 x 歲的人數。

- 定常人口 T_x 的詮釋：

→ l_x 位現年 x 歲的人，未來一生中存活年數的總和。

→ 任一時間年齡在 x 歲以上的所有人數。

定常人口 L_x 的詮釋

Age in days x	Probability of surviving to age x ${}_xp_0$	Population alive on:							
		Jan. 1	Jan. 2	Jan. 3	Jan. 4	Jan. 5	Jan. 6	.....	Dec. 31
0	1.000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	.....	1,000
1	.970		970	970	970	970	970	.....	970
2	.950			950	950	950	950	.....	950
3	.946				946	946	946	.....	946
4	.942					942	942	.....	942
.	.						.	.....	.
.	.							.....	.
364	0.900							.....	900

註：新生兒定常人口 L_0 根據定義等於第一行相加；如果一年出生的人數均勻分佈在每天，則1月1日出生的嬰兒之定常人口 L_0 也等於最後一行（即對角線）的相加。

- Y_x 的詮釋：

→ T_x位現年 x 歲以上的人，未來存活年數的總和。

$$Y_x = \int_x^{\infty} T_y \, dy.$$

註：以上的計算均假設每年出生人數 l_0 ，如果實際出生人數為 B，則上述的數字需再乘以 $\dfrac{B}{l_0}$ 。

生命表的可能應用

Process	*State studied*	*State entered when...*	*State left when...*	*Vertical dimension of the table*
Mortality	Being alive	Born	Die	Duration of life (age)
Nuptiality (first marriage)	Being unmarried	Born	Marry	Duration of single life (age)
Migration from place of birth	Living in place of birth	Born	Move to another place	Duration of residence (age)
Entering the labor force	Having never worked	Born	First enter labor force	Duration of life (age)
Becoming a mother	Having no births	Born	Have first birth	Duration of life (age)
Subsequent childbearing	Not having an additional birth	Have a birth	Have an additional birth	Duration since having a birth
Marital survival	Being in intact marriage	Marry	Marriage ends	Duration of marriage
Unemployment spells	Being unemployed	Become unemployed	Leave state of unemployment	Duration of unemployment
Incarceration	Being in jail	Enter jail	Leave jail	Duration of incarceration

[a] All of these processes can also be conceived as multiple decrement processes. Here we ignore other risks of leaving the state of interest.

- 範例一：試求未來死亡時介於 x 到 $x+n$ 歲，死亡時的平均年齡。

→分別計算死亡人數與死亡總年齡。

$$ {}_n d_x = \ell_x - \ell_{x+n} = \int_0^n \ell_{x+t}\, \mu_{x+t} d_t $$

$$ \int_0^n (x+t)\ell_{x+t}\mu_{x+t}\, dt = x \cdot {}_\mathrm{n} d_x + \int t \cdot \ell_{x+t}\mu_{x+t}\, d_t $$

其中 $\int_0^n t \cdot \ell_{x+t}\mu_{x+t}\, d_t = -n \cdot \ell_{x+n} - T_{x+n} + T_x$

因此，平均年齡 ＝ $x + \dfrac{T_x - T_{x+n} - n \cdot \ell_{x+n}}{{}_n d_x}$.

- 範例二：計算現年 x 歲以上的人過去及未來存活的總年數。

→ 過去的存活年數即為年齡，計算時可分為兩部份：

(1) $x \cdot T_x$：每個人至少都活到了 x 歲；

(2) x 歲以後的年齡則可由下式求得

$$\int_x^{\infty} (y-x)\ell_y dy = -y \cdot T_y - Y_y - x \cdot T_y \Big|_x^{\infty} = Y_x$$

綜合上述結果，現在的年齡(或過去的存活年數)總和為 $xT_x + Y_x$。

→未來的存活年數計算與 x 歲以後的年齡相同，也等於 $Y_x = \int_x^{\infty} T_y\, dy.$

因此，如果考慮的是一生的存活年數總和，則為 $xT_x + 2Y_x$。

- 範例三：計算現年 x 到 $x+n$ 歲且會生存至 $x+m$ 歲的人，現在的平均年齡。

→平均年齡＝過去存活年數/總人數，或是

$$\frac{\int_0^n (x+t)\ell_{x+m}\, dt}{\int_0^n \ell_{x+m}\, dt} = \frac{(xt + \frac{t^2}{2})\ell_{x+m}\Big|_0^n}{t \cdot \ell_{x+m}\Big|_0^n} = x + \frac{n}{2}$$

- 註：上述的計算可藉由積分簡化，

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} f(y,t)\cdot \ell_{y+t}\mu_{y+t}\, dtdy$$

試舉例說明積分的原則。

→ $f(y,t)=1$ 代表人數；

→ $f(y,t)=y$ 代表過去存活年數；

→ $f(y,t)=t$ 代表未來存活年數。

- 範例四：計算現年40至65歲的人，在30歲以後的過去存活年數。

→根據定義

$$\int_{40}^{65} (y-30)l_y\,dy = -(y-30)T_y\Big|_{40}^{65} + \int_{40}^{65} T_y\,dy$$

$$= -(y-30)T_y - Y_y\Big|_{40}^{65}$$

$$= 10T_{40} - 35T_{65} + Y_{40} - Y_{65}.$$

- 範例五：計算現年30至65歲的人且在60至80歲間死亡的人，死亡時的平均年齡。

→根據定義可分成兩段計算積分

$$\int_{30}^{60}\int_{60-y}^{80-y} f(y,t)l_{y+t}\,\mu_{y+t}dt\,dy+\int_{60}^{65}\int_{0}^{80-y} f(y,t)l_{y+t}\,\mu_{y+t}dt\,dy$$

其中代入 $f(y,t) = 1$ 計算人數、

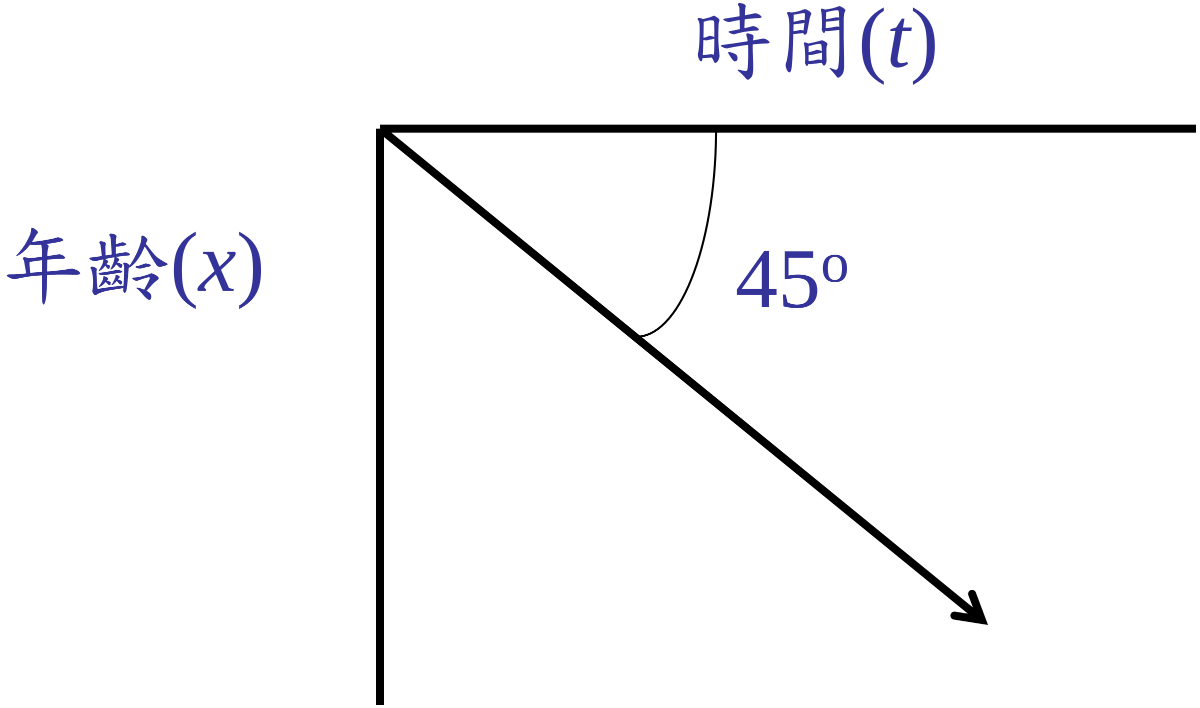
$f(y,t) = y+t$ 計算總生存年數。

計算可得：

$$\frac{1800l_{60}+90T_{60}+2Y_{60}-65T_{65}-2Y_{65}-2800l_{80}-35T_{80}}{30l_{60}+T_{60}-T_{65}-35l_{80}}.$$

Lexis Diagram（續）

- Lexis diagram (Veit, 1964)可使定常人口的計算更為精簡。



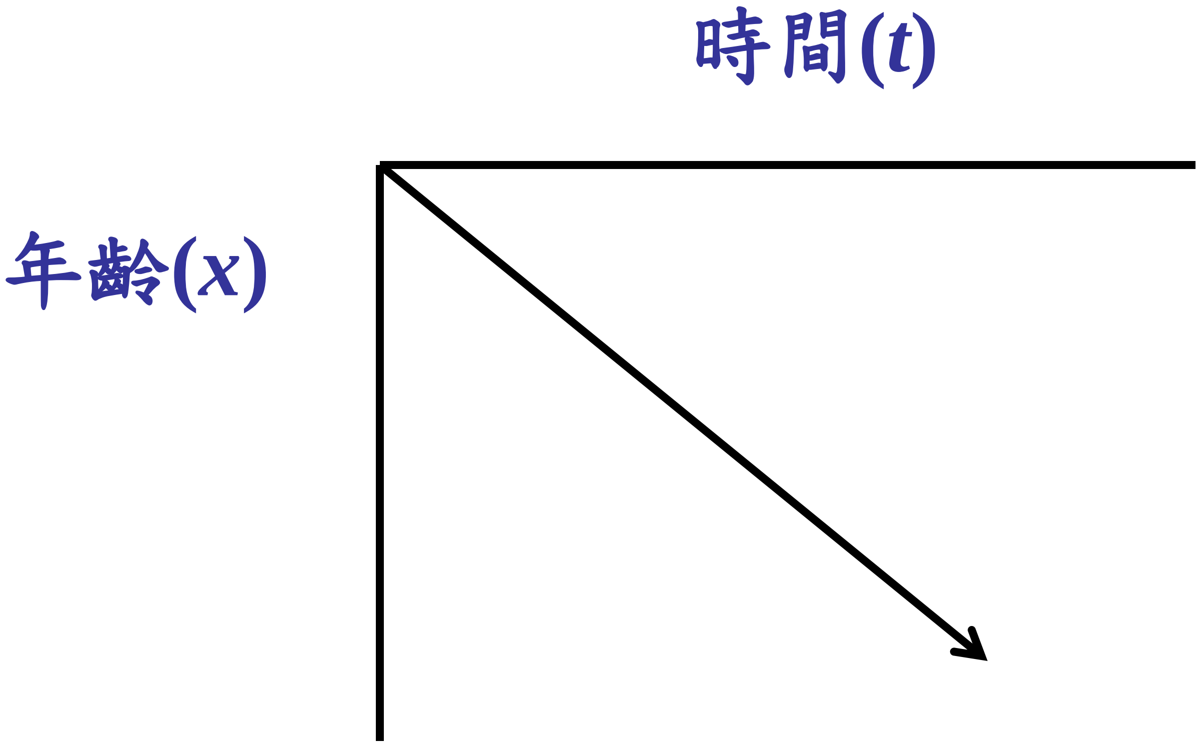
- Lexis diagram的基本原則：

→陸地：水平線、垂直線

→海洋：對角線

→ 移民必須藉由陸地，其中

<u>西、北</u>→移入；<u>東、南</u>→移出



- 移入：

→北邊為60歲，長度為30→ $30l_{60}$

西邊為60至65歲→ $T_{60}-T_{65}$

- 移出：

→南邊為 $35l_{80}$，東邊無移出者。

- 綜合以上兩個考量，可知總人數等於

$$\text{總人數} = 30\ell_{60} + \mathrm{T}_{60} - \mathrm{T}_{65} - 35\ell_{80}.$$

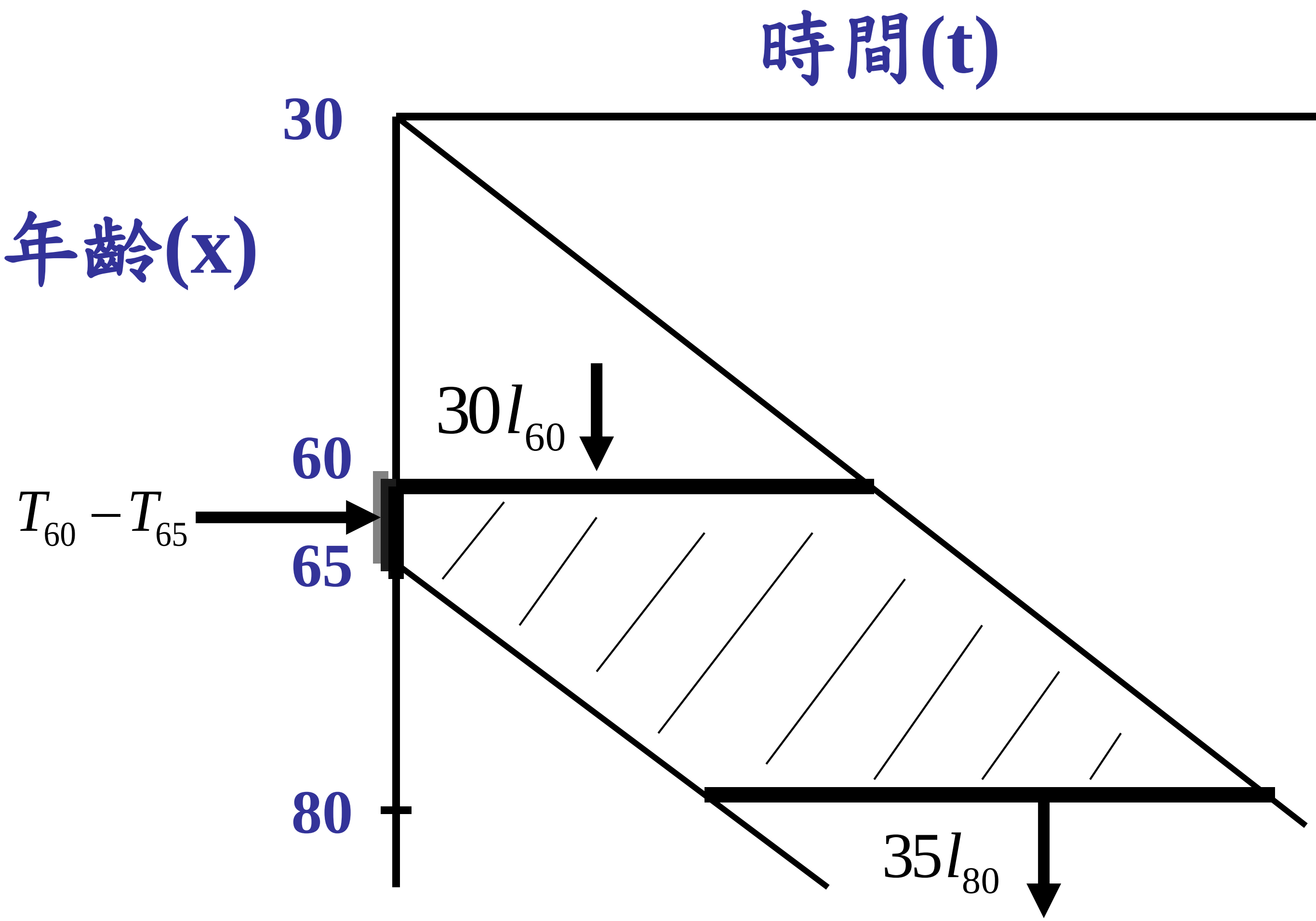
其中存活年數即過去+未來(未來)的轉換為

→ l_x 的存活年數為 $xl_x + T_x$ (Tx)

T_x 的存活年數為 $xT_x + 2Y_x$ (Yx)

- 範例五(續)：計算現年30至65歲的人且在60至80歲間死亡的人，死亡時的平均年齡。

→先根據題意繪出Lexis diagram：



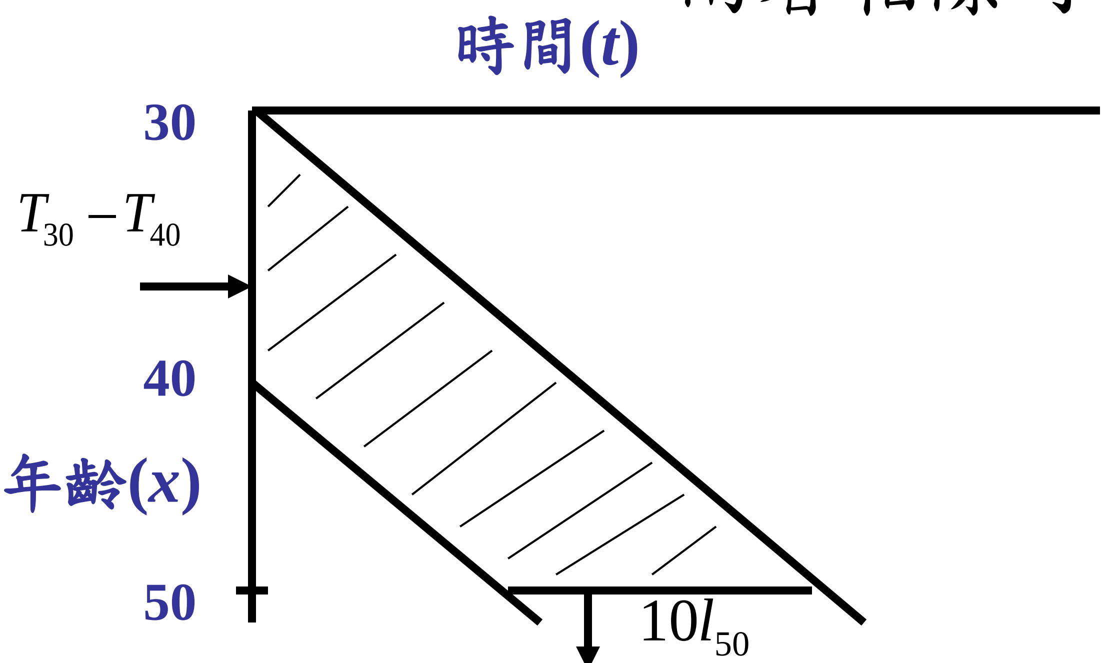
- 範例六：計算現年30至40歲且在50歲前死亡的人，現在(或死亡時)的平均年齡。

→根據題意可求出滿足條件的人等於

$T_{30}-T_{40}-10l_{50}$ ，而過去的存活年數等於

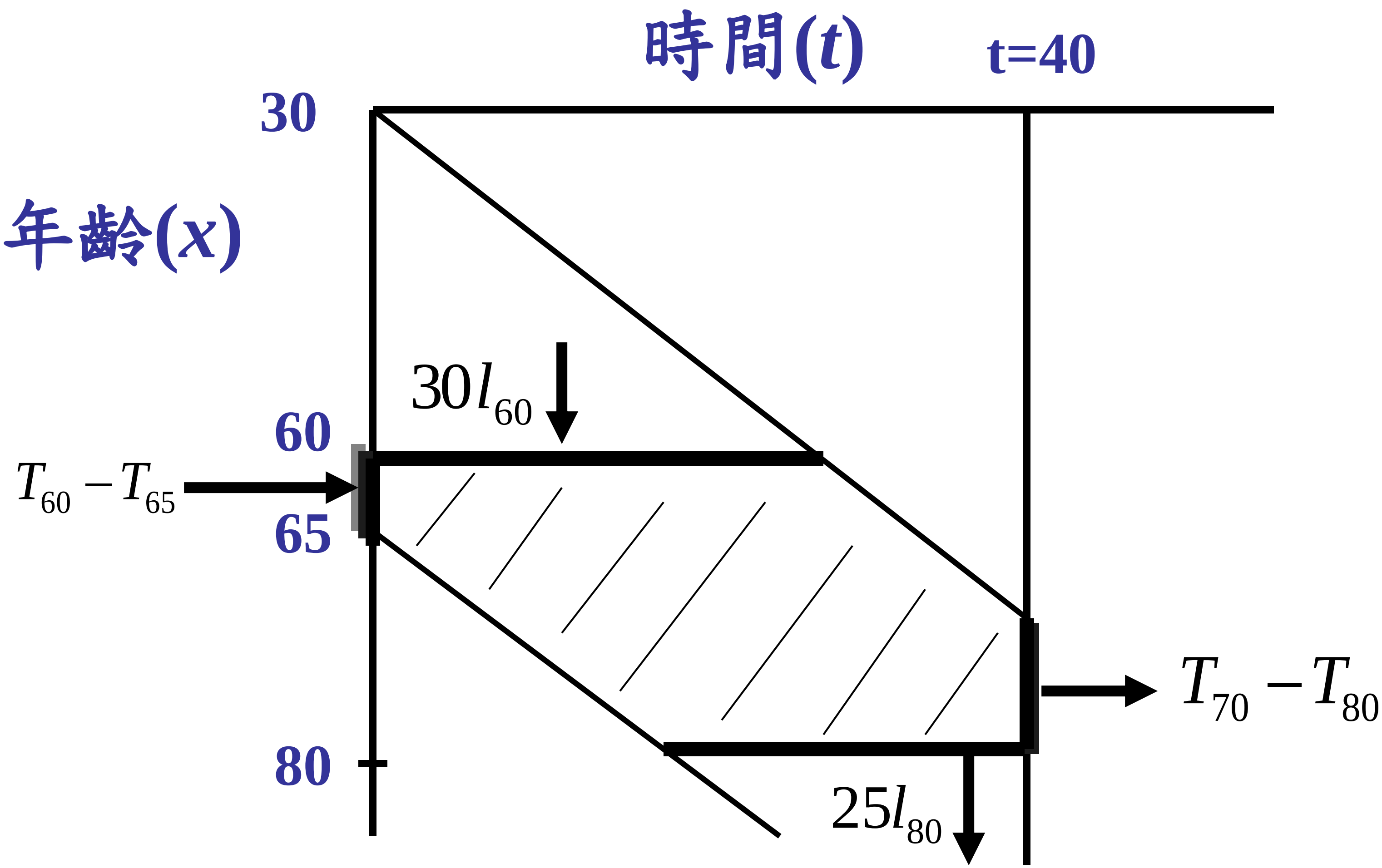
$(30T_{30}+Y_{30})-(40T_{40}+Y_{40})-10(50l_{50})$.

兩者相除可得平均年齡。



- 範例七：計算現年30至65歲的人且在60至80歲與未來40年間死亡的人，死亡時的平均年齡。

→根據題意繪出Lexis diagram：



- 應用範例一(退休年金)：
  每年有新生兒5000人；每人滿25歲時繳交2000元，之後到65歲前每年交100元；滿65歲後每年領取1500元，若在滿65歲前死亡可領500元的死亡津貼。

→(a) 每年貢獻在年金的有 $\dfrac{5000}{l_0}(T_{25}-T_{65})$ 人，(介於25至64歲的人數)。

→(b) 每年貢獻於年金保險的金額：

$$\frac{5000}{l_0}\left[2000 l_{25}+100(l_{26}+\cdots+l_{64})\right]$$

$$=\frac{5000 l_{25}}{l_0}(2000+100\cdot e_{25:\overline{40}|})$$

→每年年金的支付金額

$$\frac{5000}{l_0}\cdot 1500(l_{65}+l_{66}+\cdots)=\frac{5000}{l_0}\cdot 1500\cdot l_{65}\,e_{65}$$

→每年的死亡津貼

$$\frac{5000}{l_0}\cdot 500(d_{25}+d_{26}+\cdots+d_{64})=\frac{5000}{l_0}\cdot 500\cdot(l_{25}-l_{65})$$

- 應用範例一(續：國民年金)：

  政府宣布2008年10月起實施國民年金，年滿二十五歲至未滿六十五歲，沒有勞保、農保、公保、軍保及教保等保險，主管機關就會主動發單納入國民年金保險。

→(a) 每年貢獻在年金的有 $T_{25}-T_{65}$ 人（25至64歲的人數），收取的總保費 $P\times(T_{25}-T_{65})$。

→(b) 每年支出的年金金額 $\ddot{a}\times T_{65}$，若每年領取3.6萬元，代入2007年臺灣地區兩性簡易生命表 $T_{25}=5355920$ 及 $T_{65}=1579448$，則25至64歲每人每年需繳交 $P=\dfrac{\ddot{a}\times T_{65}}{T_{25}-T_{65}}=15056$

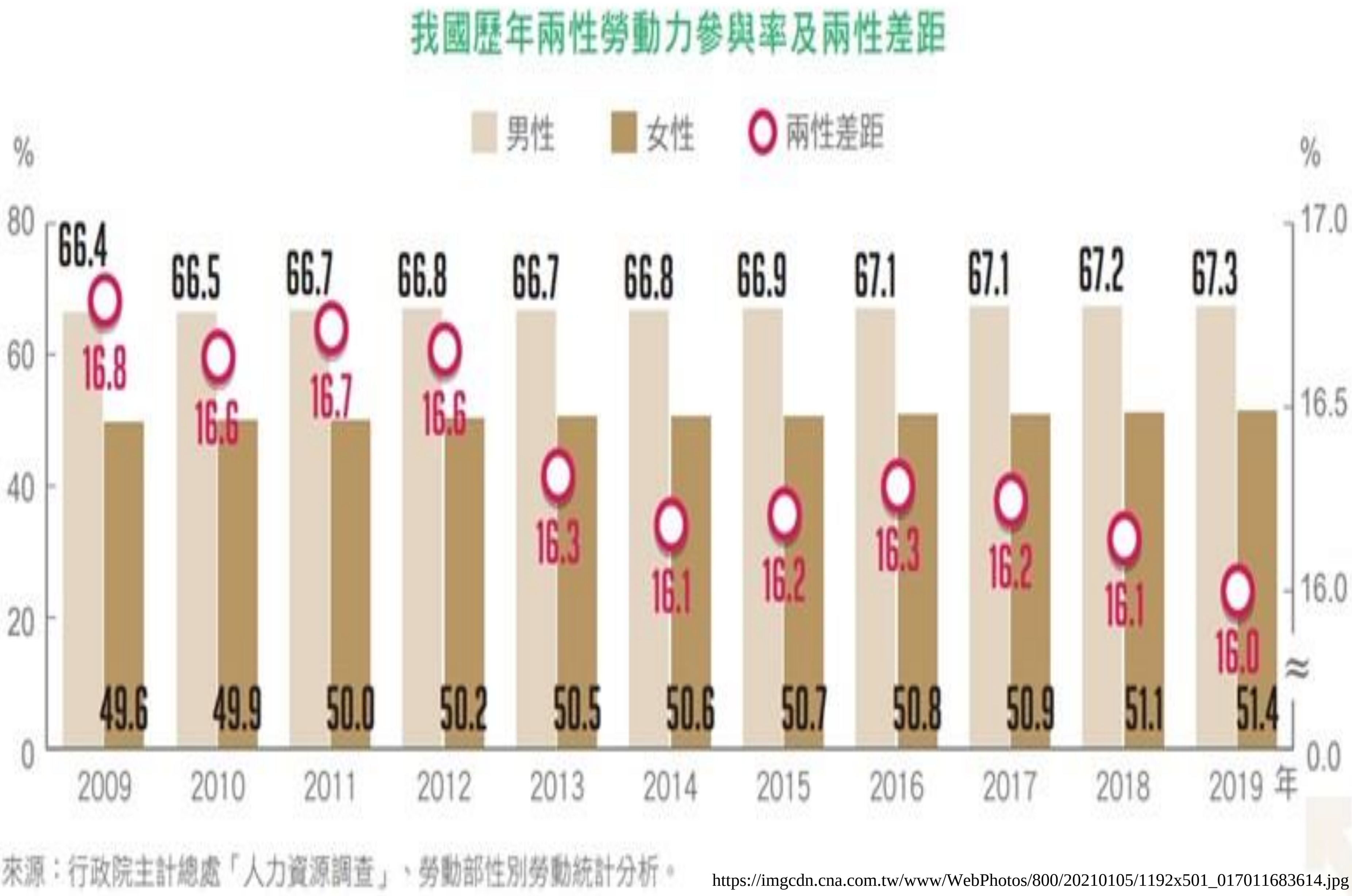
- 應用範例一(續：國民年金)：

→代入定常人口假設，行政院規劃每月繳交618元，退休後每月領取7,603元，約只有應收取的20%(3,180元)。加上壽命延長，每人需由政府負擔近100萬元，以每年出生人數20萬、參加國民年金佔總人數兩成，額外負擔400億。(註：2012年年底的25-64歲約1,400萬人，勞動參與率75%，每人每年需增稅3,800元。)

→另需負擔每月3,000元敬老津貼，2012年年底65歲以上人口260萬，轉嫁至25-64歲勞動人口，每人每年需增稅接近6,700元 。

註：上述兩者負擔約為平均薪資的2%以上！

台灣歷年男女性勞動參與率



https://imgcdn.cna.com.tw/www/WebPhotos/800/20210105/1192x501_017011683614.jpg

- 應用範例二(國軍戰力)：

假設台灣國軍要維持陸軍100,000人的穩定戰力。男子在滿21歲時需入伍服務5年，前兩年每天薪資20元，後3年薪資30元，死亡津貼為服役至死亡的薪資總和，退伍時領取2000元。

→(a) 令每年入伍的人數為 x ，需滿足

$$100{,}000 = \frac{x}{l_{21}}(T_{21} - T_{26}) \Rightarrow x = \frac{100{,}000 l_{21}}{T_{21} - T_{26}}.$$

→(b) 退伍津貼為 $\dfrac{x}{l_{21}} \cdot 2000 l_{26}.$

→(c) 每年用於薪水的國防預算：

$$\frac{x}{l_{21}}\left[20(365)(L_{21}+L_{22})+30(365)(L_{23}+L_{24}+L_{25})\right]$$

$$=\frac{x}{l_{21}}[20(365)(T_{21}+0.5T_{23}-1.5T_{26})].$$

→ (d) 在均勻死亡假設下計算每年的死亡津貼：

$$365\left(\frac{10d_{21}+30d_{22}+55d_{23}+85d_{24}+115d_{25}}{l_{21}-l_{26}}\right).$$

- 應用範例三(老人之家的零用金)：
  每年有100位新進者進入老人之家；前兩年或70歲前每週發給100元零用金，之後每週發給200元零用金。

進入年齡	進入人數
66	25
67	35
68	25
69	10
70	5

→(a) 每年新增的零用金(每週，原先已在的人)

$$\$100\times(25\frac{l_{70}}{l_{66}}+35\frac{l_{70}}{l_{67}}+25\frac{l_{70}}{l_{68}}+10\frac{l_{71}}{l_{69}}+5\frac{l_{72}}{l_{70}}).$$

其中原先66歲進入老人之家者，在滿70歲時每週可增加零用錢$100，這些人的總數有 l_{70}，再乘以調整係數 $\frac{25}{l_{66}}$ 即可得到第一項。其他各項的計算類似。

註：上述計算未考慮新進者，如果加入上一頁提到的新進，可以仿造辦理。

→(b) 每年需支付的零用金總數

$$5200\left[25\frac{T_{66}+T_{70}}{l_{66}}+35\frac{T_{67}+T_{70}}{l_{67}}+25\frac{T_{68}+T_{70}}{l_{68}}\right.$$
$$\left.+10\frac{T_{69}+T_{71}}{l_{69}}+5\frac{T_{70}+T_{72}}{l_{70}}\right].$$

其中66歲進入老人之家者，可以分成兩類：

(1) 66歲進入、未滿70歲： $\$100\times(T_{66}-T_{70})$

(2) 66歲進入、超過70歲： $\$200\times T_{70}$

兩者相加後可得 $\$100\times(T_{66}+T_{70})$，乘以52週以及調整係數 $\dfrac{25}{l_{66}}$ 即可得第一項；其餘各項類似。

生命表函數的積分定義：

$$l(x) = l(a)e^{-\int_a^x \mu(y)\,dy} \quad \text{for } x > a$$

$$_np_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = e^{-\int_x^{x+n} \mu(a)\,da}$$

$$_nd_x = \int_x^{x+n} l(a)\mu(a)\,da = \int_x^{x+n} l(x)e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\mu(a)\,da = l(x)\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\mu(a)\,da$$

$$_nq_x = \frac{_nd_x}{l(x)} = \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\mu(a)\,da$$

$$_nL_x = \int_x^{x+n} l(a)\,da = \int_x^{x+n} l(x)e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\,da = l(x)\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\,da$$

$$_nm_x = \frac{_nd_x}{_nL_x} = \frac{\int_x^{x+n} l(a)\mu(a)\,da}{\int_x^{x+n} l(a)\,da} = \frac{\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\mu(a)\,da}{\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\,da}$$